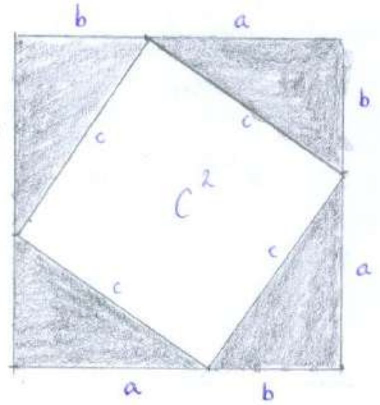
Teorema de Pitágoras.

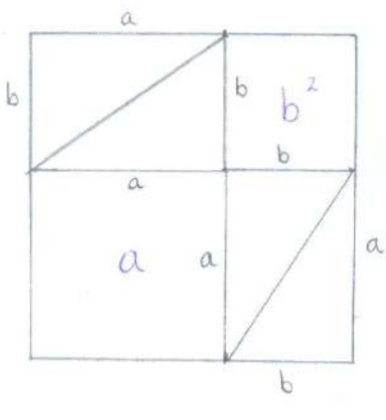
Es importante hacer notar la temporalidad de este teorema, pues data del año 500 antes de nuestra era; es importante retomar el dato que cuando se formaliza el teorema o la operatividad este ya era practicado en Babilonia y la India.

Ahora bien existen aproximadamente 300 demostraciones sobre tal teorema pero se determina de Pitágoras porque fue quien dio todos sus esfuerzos para formalizarlo.

En esta sesión trabajaremos con dos demostraciones del tipo geométrico y algebraico.

Demostración geométrica.





→ Tomamos como base triángulos rectángulos los cuales serán nuestra materia prima para la utilidad del teorema de pitágoras.

→ Catetos y la hipotenusa son partes fundamentales y la siguiente demostración trabaja con el concepto de un valor elevado al cuadrado. Corresponde esta idea para cada cuadratura según catetos.

→ Tomando en cuenta los cuatro triángulos rectángulos los manipularemos para formar el cuadrado de "a" y de "b".

Por obviedad serán diferentes distancias y áreas.

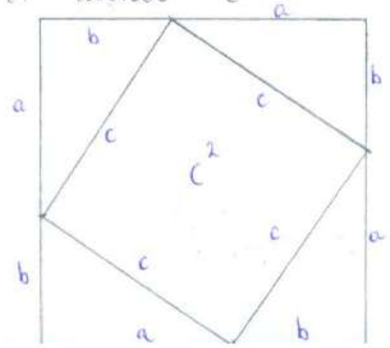
→ Los cuatro triángulos sobreados han cambiado de lugar manteniendo la misma magnitud de c^2; por ello se hace conocimiento de un principio de conservación entre el cuadrado de "c" y su relación con "a" y "b".

→ Se justifica por tanto que c^2 es igual a la suma de a^2 y b^2.

Generando la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$

Demostración algebraica.

Unicamente trabajaremos con el primer cuadrado, tomando en cuenta el área del cuadrado principal observando que tenemos por lado la suma de los segmentos a y b; por otro lado generaremos una igualdad con el área de los cuatro triángulos y el cuadrado c^2.



- Área del cuadrado con base en los lados del cuadrado original.

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2$$

- Generando una igualdad entre ambas maneras de manejar el área del cuadrado tenemos:

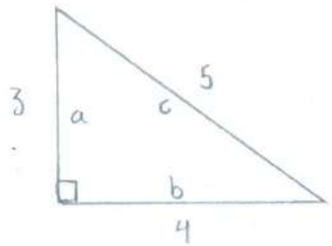
- Área del cuadrado con base en los triángulos y cuadrado "c^2" (áreas de dichas figuras)

$$4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$$
$$\frac{4ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Triadas Pitagoricas "Números Sagrados".

Se consideraba a la terna o triada pitagorica 3, 4, 5 como números consecutivos con relaciones en un triángulo pues con estos datos han de haber construido la piramide de kefren en egipto en el siglo XXVI a.C.

(3, 4, 5) y los relaciones entre sus lados del triángulo rectángulo.
×3 ×3 ×3



T. Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$

→ Se supone no conocer uno de los catetos o hipotenusa para corroborar los resultados de esta terna.

→ Podemos utilizar a y b para cualquiera de los catetos y c siempre para la hipotenusa.

Suponiendo que falta "a"

$a^2 = c^2 - b^2$
$a^2 = 5^2 - 4^2$
$a^2 = 25 - 16$
$a^2 = 9$
$a = \sqrt{9}$
$\underline{a = 3}$

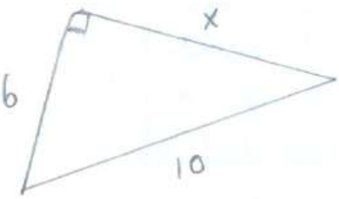
$c^2 = 3^2 + 4^2$
$c^2 = 9 + 16$
$c^2 = 25$
$c = \sqrt{25}$
$\underline{c = 5}$

Suponiendo que falta "b"

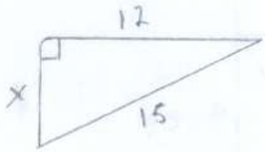
$b^2 = c^2 - a^2$
$b^2 = 5^2 - 3^2$
$b^2 = 25 - 9$
$b^2 = 16$
$b = \sqrt{16}$
$\underline{b = 4}$

Se propondran las siguientes ternas pitagoricas, los alumnos descubrirán uno de los valores faltantes.

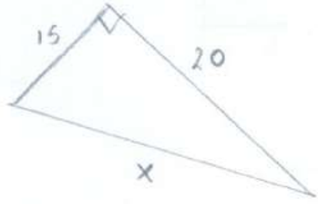
(1)



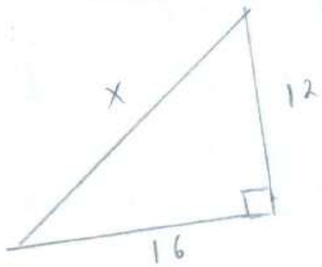
(2)



(4)



(3)

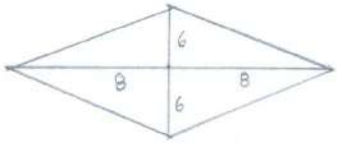


(5) Construir un triángulo rectángulo que tenga como catetos a 18 y 24; encontrar la hipotenusa (valor)

Problemas sobre teorema de Pitagoras.

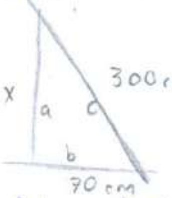
1. Calcular el perimetro del siguiente rombo si sabemos que sus diagonales (altura y anchura) miden 16 y 12.

Perímetro: 40 unidades



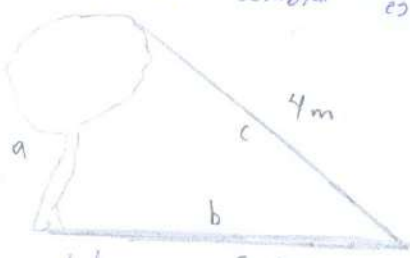
$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 6^2 + 8^2$
$c^2 = 36 + 64$
$c^2 = 100$
$c = \sqrt{100}$
$c = 10$

2. Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 cm de esta.



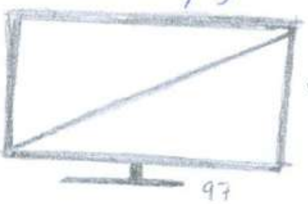
$a^2 = c^2 - b^2$
$a^2 = 300^2 - 70^2$
$a^2 = 90000 - 4900$
$a^2 = 85,100$
$a = \sqrt{85,100} = 291.7$

3. Al atardecer un arbol proyecta una sombra de 2.5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del arbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros. ¿Cuál es la altura del árbol?



$a^2 = c^2 - b^2$
$a^2 = 4^2 - 2.5^2$
$a^2 = 16 - 6.25$
$a^2 = 9.75$
$a = \sqrt{9.75} = 3.12$ m

4. La medida que se utiliza en los televisores es la longitud de la diagonal de la pantalla en unidades de pulgadas. Una pulgada equivale a 2.54 cm. Si David desea comprar un televisor para colocarlo en un hueco de 96 X 97 cm. ¿De cuantas pulgadas debe de ser el televisor?



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 96^2 + 97^2$
$c^2 = 18,625$
$c = \sqrt{18,625}$
$c = 136.47$ cm

en pulgadas 53.7 pul

5. Un clavadista esta entrenando en una piscina con una plataforma. Cuando realiza el salto, cae a una distancia de 1 metro de la plataforma sumergiendose 2.4 metros bajo el agua. Para salir a la superficie, busca hasta el final de la piscina siguiendo una linea transversal de 8.8 metros de longitud.

Si la longitud desde la parte superior de la plataforma al lugar en donde emerge del agua es de 11.2 metros ¿Cuál es la altura de la plataforma (desde el nivel del agua)?

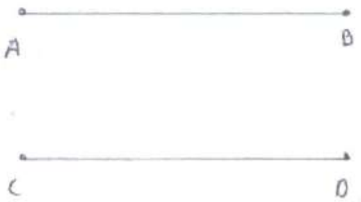
Criterios de congruencia y semejanza en triángulos

Tenemos que comprender que cuando hablamos de congruencia hablamos de una igualdad entre dos imagenes ; la palabra congruencia proviene del latin "correspondencia lógica" (congruentia). Exactamente pasa esto con la matemática y la rama de la geometría.

Los principales pasos para poder ser aplicado en un triángulo es comprender la simbología y los antecedentes ; congruencia en rectas, ángulos y su proximidad con temas cómo traslación, rotación, simetría axial y central.

Congruencia en rectas.

Hemos de considerar la congruencia con base en el paralelismo.

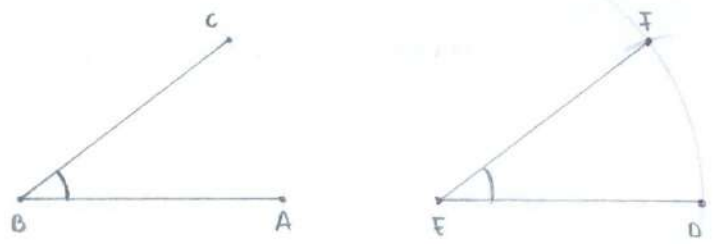


Utilizaremos las escuadras para poder explicar el paralelismo.

Por lo tanto $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

símbolo de congruencia.

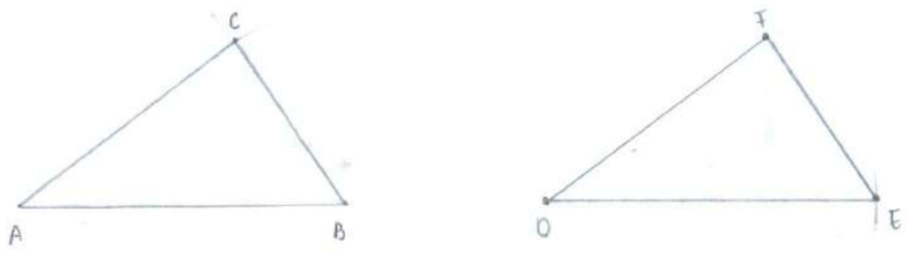
Congruencia en ángulos.



Por lo tanto estos ángulos son congruentes, representandos de la siguiente forma:

$\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$

Congruencia en triángulos.



En este ejemplo hemos de identificar los siguientes criterios de congruencia con relación a rectas y ángulos.

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$ $\quad \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF$ $\quad \Delta ABC \cong \Delta DEF$

$\overline{CB} \cong \overline{FE}$ $\quad \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF$

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ $\quad \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle DFC$

Los criterios de congruencia cumplen con tres propiedades : reflexiva, simétrica y transitiva.

En este caso $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ son o cumplen con la propiedad reflexiva.

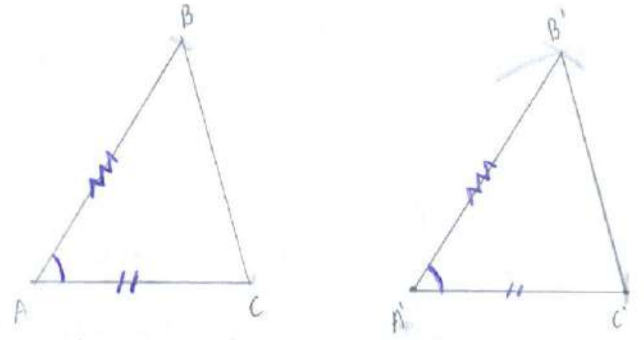
Si en un tercer triángulo se cumple $\Delta DEF \cong \Delta GHI$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta GHI$ P. transitiva.

Satisfaciendo los propiedades antes expresadas cumpliremos con tres criterios de congruencia:

Criterios de congruencia.

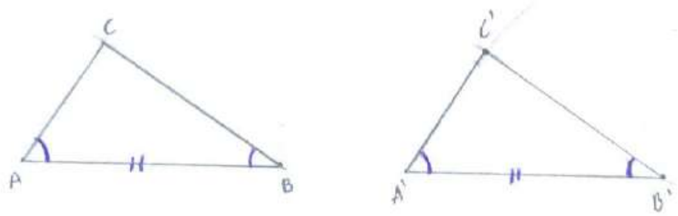
* Si dos triángulos son congruentes entonces dos lados de uno tienen la misma longitud que dos lados del otro, y los ángulos comprendidos entre estos lados tienen tambien la misma medida.

  LAL. (Lado, Ángulo, Lado).



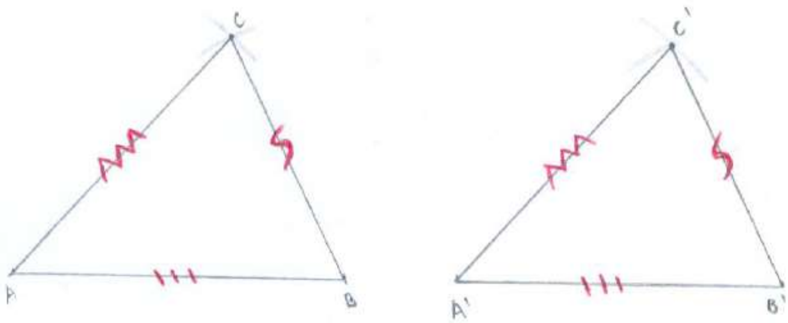
* Dos triángulos son congruentes si dos ángulos interiores y el lado comprendido entre ellos tienen la misma medida y longitud, respectivamente. (El lado comprendido entre dos ángulos es común a ello)

  ALA (Ángulo, Lado, Ángulo)



* Dos triángulos son congruentes si cada lado de un triángulo tiene la misma longitud que los correspondientes de otro ángulo

  LLL (Lado, Lado, Lado)

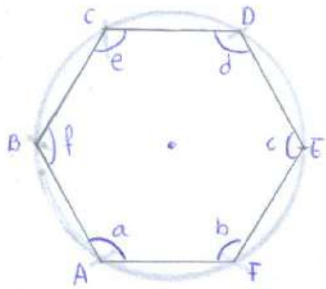


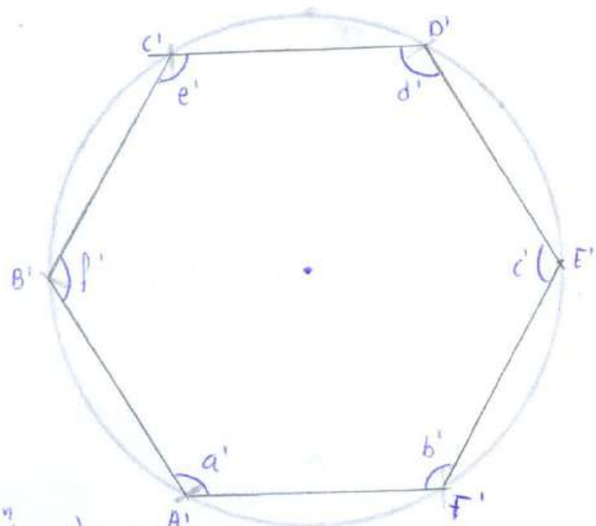
Criterios de Semejanza.

Desde una perspectiva personal y analizando la conceptualización la semejanza tiene en común ciertas características, pero no existe como tal una igualdad como lo hemos visto en la congruencia.

Una figura es semejante si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales.
Es decir, una de las imagenes es una ampliación o reducción.

* Construiremos un hexagono que tenga como radio 2 cm y otro más grande por el doble.





- Nota: Es importante mencionar que el radio es igual a la distancia de los lados del hexagono.

Igualdad en ángulos

$\sphericalangle a = \sphericalangle a'$

$\sphericalangle b = \sphericalangle b'$

$\sphericalangle c = \sphericalangle c'$

$\sphericalangle d = \sphericalangle d'$

$\sphericalangle e = \sphericalangle e'$

$\sphericalangle f = \sphericalangle f'$

Semejanza en lados.
(Proporcionales de imagen original a otra como relación)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}}$$

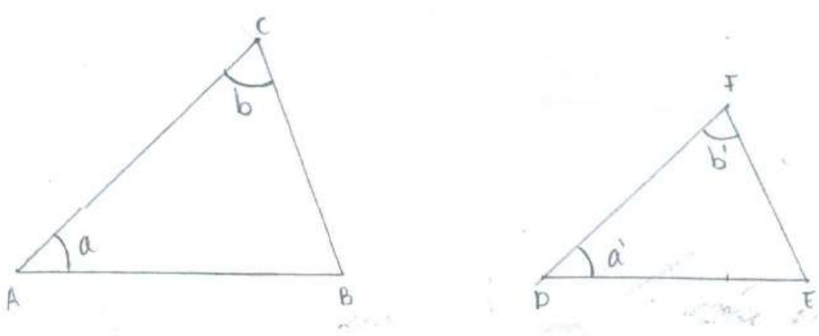
Por lo que se deduce que al comparar ambas cantidades semejantes (razones) correspondientemente obtenemos el mismo cociente.

* CRITERIOS DE SEMEJANZA.

Se van a considerar las igualdades en ángulos y las proporciones entre los lados de dos figuras y se conformaron los siguientes criterios de semejanza.

Ángulo, ángulo (AA)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales (congruentes).



$\sphericalangle a = \sphericalangle a'$

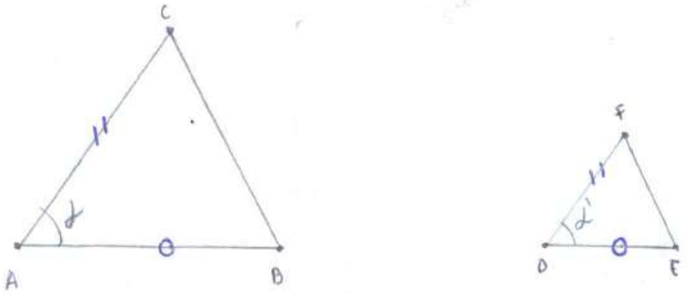
$\sphericalangle b = \sphericalangle b'$

$\therefore$

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Lado, ángulo, lado (LAL)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos.



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

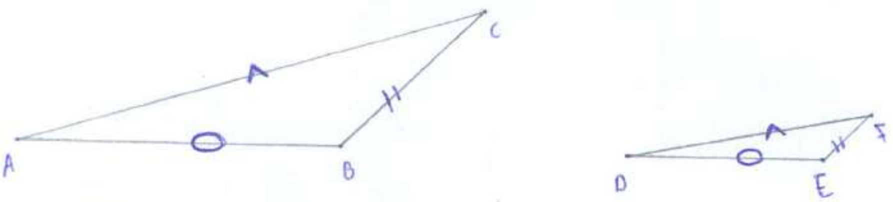
$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$ ángulos congruentes.

Lados proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Lado, lado, lado (L,LL).

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.



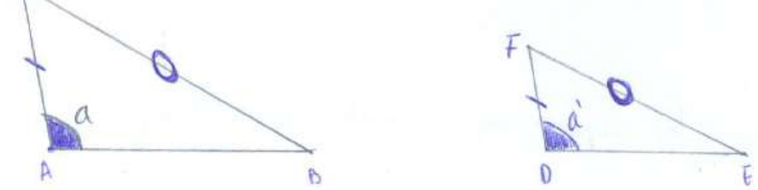
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Tres lados proporcionales $\therefore$

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Lado, lado ángulo (LLA)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo opuesto al mayor de ellos es respectivamente igual.



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}}$$

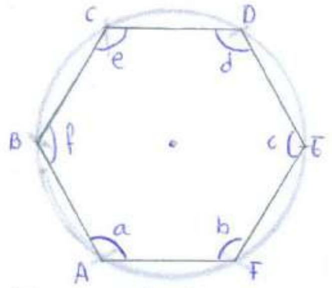
$\sphericalangle a = \sphericalangle a'$

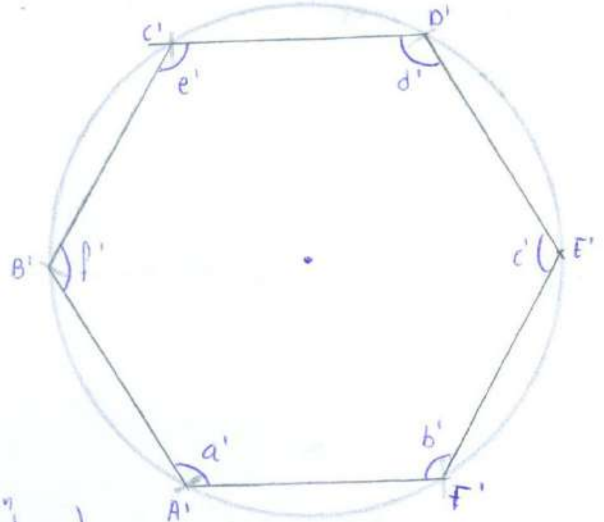
Criterios de Semejanza.

Desde una perspectiva personal y analizando la conceptualización la semejanza tiene en común ciertas características, pero no existe como tal una igualdad como lo hemos visto en la congruencia.

Una figura es semejante si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales.
Es decir, una de las imagenes es una ampliación o reducción.

* Construiremos un hexagono que tenga como radio 2cm y otro más grande por el doble.





- Nota: Es importante mencionar que el radio es igual a la distancia de los lados del hexagono.

Igualdad en ángulos

$\measuredangle a = \measuredangle a'$

$\measuredangle b = \measuredangle b'$

$\measuredangle c = \measuredangle c'$

$\measuredangle d = \measuredangle d'$

$\measuredangle e = \measuredangle e'$

$\measuredangle f = \measuredangle f'$

Semejanza en lados.
(Proporcionales de imagen original a otra como relación)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}}$$

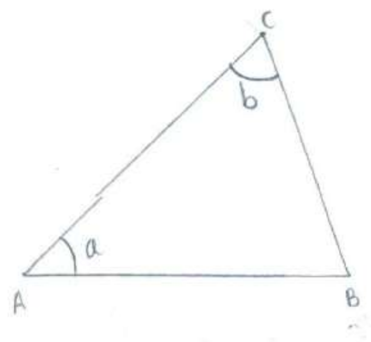
Por lo que se deduce que al comparar ambas cantidades semejantes (razones) correspondientemente obtenemos el mismo cociente.

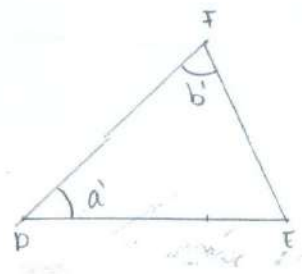
* CRITERIOS DE SEMEJANZA.

Se van a considerar las igualdades en ángulos y las proporciones entre los lados de dos figuras y se conformaron los siguientes criterios de semejanza.

Ángulo, ángulo (AA)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales (congruentes).





$\measuredangle a = \measuredangle a'$

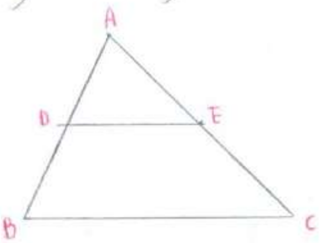
$\measuredangle b = \measuredangle b'$

$\therefore$

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Teorema de Tales de Mileto.

Lo primero que se debe de saber sobre dicho teorema es el conocer sobre los criterios de semejanza en dos triángulos, lo que debemos de saber es la siguiente logica.

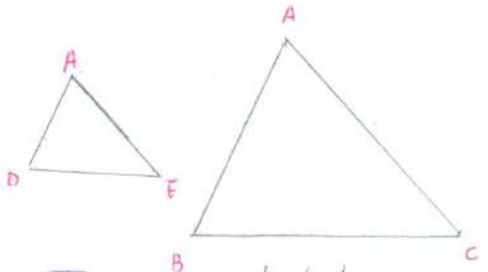


Formaremos un triángulo cualquiera, pero tendremos dentro de la figura una paralela a la parte inferior.

Nosotros hemos de observar que el ángulo ADE junto con ABC son congruentes. el ángulo AED y ACB de igual manera compartiendo al ángulo BAC el cual por analogia hemos de observar que tenemos dos triángulos. $\therefore$

Si lo separamos obtenemos lo siguiente.

$\Delta ADE \cong \Delta ABC$ (Semejantes $\sim$)



Sabiendo por semejanza la relación de sus ángulos hemos de saber que sus lados son proporcionales generando la siguiente comparación.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

$\longrightarrow$ Antecedentes. Los intercambiaremos $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$

$\longrightarrow$ Consecuentes.

De los antecedentes vamos a representar como la suma de dos segmentos tal como se observo en la primera figura.

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

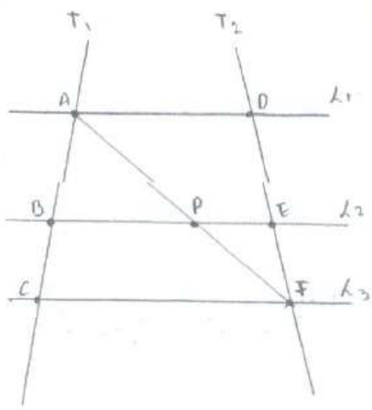
$$\cancel{\frac{AD}{AD}} + \frac{DB}{AD} = \cancel{\frac{AE}{AE}} + \frac{EC}{AE}$$

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} \Longrightarrow \underline{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}}$$

Teorema de Tales

Ahora que tenemos este conocimiento vamos a adaptarlo en rectas para conocer las mismas proporciones pero en un contexto diferente.

Analizando el teorema en triángulos ahora en el siguiente esquema generando triángulos por una recta oblicua. Tenemos la siguiente proporción.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PF}} \quad \text{Propiedad Transitiva} \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

generando la igualdad.

$$\underline{\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}}$$

Teorema de Tales